Lycée Condorcet

Comment écrire l'équation cartésienne d'un plan en Terminale

Apprends à trouver l'équation cartésienne d'un plan : leçon, 8 exercices, correction détaillée et PDF à imprimer pour réviser en Terminale.

Éducation lycée — méthodes, fi

Terminale

Une équation cartésienne d'un plan est une égalité de la forme ax+by+cz+d=0, où (a ; b ; c) sont les coordonnées d'un vecteur normal au plan. Pour la trouver, il suffit de connaître un vecteur normal et un point du plan, puis de calculer d.

Deux points suffisent-ils à vérifier qu'une équation de plan est juste ? Non, mais un seul point bien choisi révèle déjà la plupart des erreurs de signe. Cette leçon t'apprend un réflexe : contrôler chaque équation avec un second point du plan. Tu verras aussi trois pièges fréquents, le vecteur normal confondu avec un vecteur directeur, le signe de d oublié et deux vecteurs colinéaires, puis tu t'entraîneras avec huit exercices corrigés.

Objectif de la leçon et prérequis à revoir

Terminale Mathématiques (spécialité) Algèbre et géométrie
Prénom : _____ Date : _____

> À la fin de la leçon, tu sais écrire l'équation cartésienne d'un plan de l'espace et la contrôler avec un point. Concrètement, tu lis un vecteur normal sur une équation, tu testes l'appartenance d'un point, tu construis une équation, puis tu passes d'une représentation paramétrique à la forme cartésienne.

Trois repères suffisent pour aborder la leçon. Le calcul des coordonnées d'un vecteur dans un repère orthonormé, par exemple overrightarrowAB(x_(B)-

x_(A) ; y_(B)-y_(A) ; z_(B)-z_(A)). Le **produit scalaire** : deux vecteurs sont orthogonaux exactement quand leur produit scalaire est nul, et tout le chapitre repose là-dessus. La colinéarité, c'est-à-dire la proportionnalité de deux vecteurs, car deux vecteurs directeurs colinéaires ne définissent pas un plan mais une simple direction.

Cours : vecteur normal et équation ax+by+cz+d=0

Un plan de l'espace se décrit par une seule égalité en x, y et z. L'adjectif « cartésienne » renvoie à René Descartes, dont le nom latinisé, *Cartesius*, a donné son nom aux coordonnées.

Un vecteur normal à un plan est un vecteur non nul, directeur d'une droite perpendiculaire à ce plan. Il est donc orthogonal à tous les vecteurs directeurs du plan.

Théorème : dans un repère orthonormé, le plan passant par A(x_(A) ; y_(A) ; z_(A)) et de vecteur normal vec n(a ; b ; c) est l'ensemble des points M(x ; y ; z) tels que overrightarrowAM·vec n=0. En développant, on obtient a(x-x_(A))+b(y-y_(A))+c(z-z_(A))=0, soit ax+by+cz+d=0 avec d=-(ax_(A)+by_(A)+cz_(A)).

Réciproquement, toute équation ax+by+cz+d=0 avec (a ; b ; c)≠(0 ;0 ;0) est celle d'un plan, dont vec n(a ; b ; c) est un vecteur normal. Un point appartient au plan si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation. Un même plan possède une infinité d'équations **proportionnelles** : x+2y-z+3=0 et 2x+4y-2z+6=0 décrivent le même plan. Deux plans parallèles partagent la direction de leur vecteur normal et ne diffèrent que par d.

Déterminer une équation cartésienne d'un plan - Terminale · Yvan Monka

Le vocabulaire à maîtriser

Quatre termes ne se confondent pas. Un vecteur normal est perpendiculaire au plan, alors que les vecteurs directeurs sont contenus dans ce plan. Une équation cartésienne tient en une seule égalité en x, y et z ; une **représentation paramétrique** exprime x, y et z à l'aide de deux paramètres. Les coefficients de x, y, z fournissent un vecteur normal : pour 2x-y+3z-5=0, on lit vec n(2 ;-1 ;3).

Techniques à connaître pour trouver une équation cartésienne pas à pas

Tu connais un point du plan et un vecteur normal ? Quatre gestes suffisent, toujours dans le même ordre.

1. Identifier un vecteur normal vec n(a ; b ; c) du plan.
2. Écrire ax+by+cz+d=0 avec ces coordonnées.
3. Remplacer x, y et z par les coordonnées du point connu, puis résoudre en d.
4. Vérifier avec un autre point du plan et conclure par une phrase : « Une équation cartésienne du plan est … ».

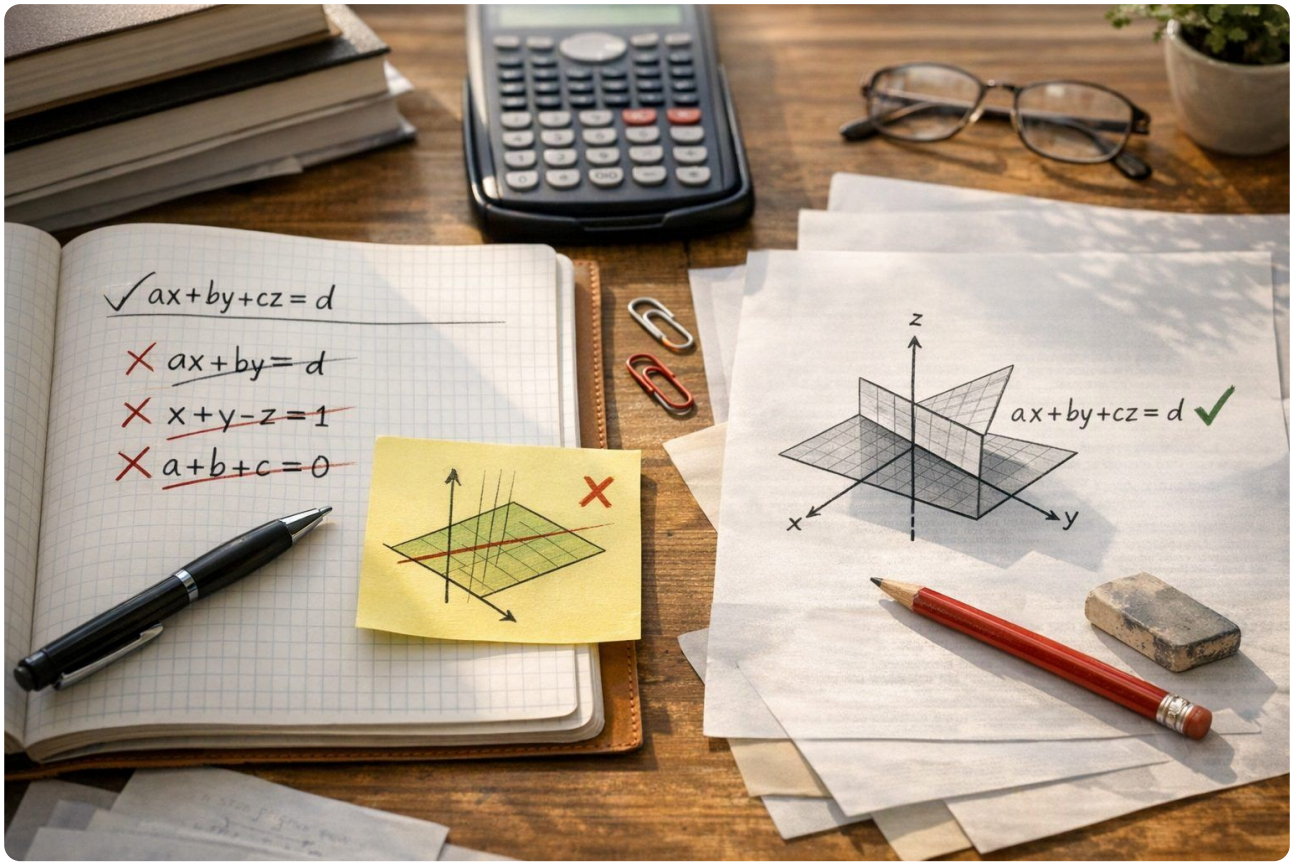
Exemple : le plan passe par A(1 ;0 ;2) et admet vec n(2 ;-1 ;3). L'étape 3 donne 2×1-0+3×2+d=0, donc d=-8 et l'équation 2x-y+3z-8=0. Pour le contrôle, un seul point *ne suffit pas* : il faut en fabriquer un second. Ajoute à A un vecteur orthogonal à vec n, par exemple (1 ;2 ;0) puisque 2-2+0=0 ; tu obtiens B(2 ;2 ;2), et 4-2+6-8=0 confirme le résultat. Ce **second point** repère ce que A ne peut pas voir, une erreur sur le vecteur normal, car d est calculé pour que A convienne, quel que soit vec n.

Quand le plan est donné par trois points

Avec trois points A, B et C, vérifie d'abord qu'ils sont **non alignés** : overrightarrowAB et overrightarrowAC *ne doivent pas* être colinéaires. Cherche ensuite vec n(a ; b ; c) tel que vec n·overrightarrowAB=0 et vec n·overrightarrowAC=0 : deux équations, trois inconnues, donc tu fixes une inconnue non nulle. Pour A(1 ;0 ;0), B(0 ;1 ;0), C(0 ;0 ;1), on trouve vec n(1 ;1 ;1), puis d=-1 grâce à A. Teste enfin B et C dans x+y+z-1=0.

De la représentation paramétrique à l'équation cartésienne

Prenons le plan passant par A(1 ;0 ;2) et dirigé par vec u(1 ;1 ;0) et vec v(0 ;1 ;1). On cherche vec n(a ; b ; c) orthogonal aux deux : a+b=0 et b+c=0. Avec b=1, on obtient vec n(-1 ;1 ;-1), donc -x+y-z+d=0. Le point A donne -1+0-2+d=0, soit d=3 : l'équation -x+y-z+3=0, équivalente à x-y+z-3=0. Pour le **contrôle**, le point A+vec u de coordonnées (2 ;1 ;2) donne 2-1+2-3=0, et A+vec v, de coordonnées (1 ;1 ;3), donne 1-1+3-3=0.



À retenir et erreurs fréquentes

À retenir

- Un plan a une équation ax+by+cz+d=0, avec (a ; b ; c)≠(0 ;0 ;0).
- Les coefficients de x, y, z forment un vecteur normal.
- Un point du plan fixe la constante d ; un second point valide l'ensemble.
- Plans parallèles : vecteurs normaux colinéaires.
- Plans perpendiculaires : vecteurs normaux orthogonaux.

Quatre erreurs reviennent sans cesse. Lire un vecteur directeur à la place du vecteur normal : avec vec u(1 ;1 ;0) posé comme (a ; b ; c), le test du second point échoue aussitôt. Perdre le **signe de d** : 2×1+3×2+d=0 donne d=-8, pas +8. Choisir deux vecteurs colinéaires, comme overrightarrowAB(1 ;2 ;3) et overrightarrowAC(2 ;4 ;6) : les deux équations du système sont identiques, et une *infinité de plans* contiennent la droite (AB). S'arrêter sans contrôle, enfin. Télécharge le PDF, remplis les exercices, puis compare avec la correction : tu y es presque.

Comment trouver l'équation cartésienne d'un plan ?

Repère un vecteur normal vec n(a ; b ; c) et écris ax+by+cz+d=0. Remplace x, y et z par les coordonnées d'un point du plan pour obtenir d. Vérifie ensuite avec un second point. Cette démarche s'applique dès que tu connais un point et un vecteur normal.

Comment trouver une équation paramétrique d'un plan à partir d'une équation cartésienne ?

Isole une variable dont le coefficient n'est pas nul, puis prends les deux autres pour paramètres s et t. Pour 2x+y-z-2=0, on pose x = s, y = t et z = 2s+t-2. Les vecteurs directeurs sont alors (1 ;0 ;2) et (0 ;1 ;1).

Comment trouver l'équation cartésienne d'un plan avec trois points ?

Vérifie que A, B et C ne sont pas alignés, puis cherche un vecteur vec n orthogonal à overrightarrowAB et overrightarrowAC en fixant une inconnue non nulle. Déduis d avec A, puis contrôle l'équation avec B et C. Si les deux vecteurs sont colinéaires, la méthode échoue.

Comment montrer que ax+by+cz+d=0 est une équation cartésienne du plan P ?

Montre que le vecteur (a ; b ; c) est normal à P, c'est-à-dire orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires de P. Montre ensuite qu'un point de P vérifie l'équation. Ces deux conditions suffisent pour conclure que ax+by+cz+d=0 est une équation cartésienne de P.

Qu'est-ce qu'un plan en géométrie dans l'espace ?

Un plan est une surface plate et illimitée. Il est déterminé par un point et deux vecteurs directeurs non colinéaires, par un point et un vecteur normal, ou par trois points non alignés. Dans un repère, il admet une équation de la forme ax+by+cz+d=0.

Comment calculer l'équation d'une droite avec deux points ?

Dans le plan muni d'un repère, calcule le coefficient directeur m=(y_(B)-y_(A))/(x_(B)-x_(A)) si les abscisses diffèrent, puis p=y_(A)-mx_(A). Pour A(1 ;2) et B(3 ;8), on trouve m = 3, p = -1, donc y = 3x-1. Si les abscisses sont égales, la droite est verticale.

Continue sur lycee-condorcet.fr

Lycée Condorcet - Document pédagogique