

L'intégration par parties : méthode et exercices corrigés

Apprends l'intégration par parties en Terminale avec une méthode guidée, des exemples, des exercices corrigés et un PDF à imprimer.

Éducation lycée — méthodes, fi

Terminale

mot-clé : intégration par parties

L'intégration par parties est une méthode de calcul qui transforme l'intégrale d'un produit de fonctions. On choisit u et v' puis on applique $\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$ afin d'obtenir une intégrale plus simple.

Face à l'intégrale $\int_0^1 x e^x dx$, chercher directement une primitive peut sembler bloquant. Le produit d'une fonction affine et d'une exponentielle indique pourtant un choix efficace : dériver x et intégrer e^x . L'intégration par parties transforme ainsi une intégrale difficile en un calcul plus accessible. En Terminale, la qualité de la rédaction compte autant que le résultat : il faut annoncer clairement u , v' et leurs dérivées ou primitives avant d'appliquer la formule.

Objectif, prérequis et définition de l'intégration par parties

Réponse rapide : l'intégration par parties, ou IPP, transforme l'intégrale d'un produit en une autre intégrale souvent plus simple. Elle s'appuie sur la dérivée d'un produit.

Terminale · Cycle terminal · Mathématiques · Analyse

Prénom : _____ Date : _____

À la fin de cette fiche, tu sauras reconnaître une situation adaptée, choisir u et v' , rédiger une IPP et calculer l'intégrale obtenue. Tu dois connaître les primitives usuelles, la dérivée d'un produit et le calcul d'une intégrale sur un intervalle.

Une **primitive** de f est une fonction F telle que $F' = f$. Une **intégrale** est un calcul noté $\int_a^b f(x) dx$. Les **bornes** sont a et b . L'**intégration par parties**, abrégée IPP, vient directement de la formule de dérivation d'un produit.

Quand utiliser une IPP ?

Une IPP est utile devant un produit lorsqu'un facteur devient plus simple en étant dérivé et que l'autre possède une primitive immédiate. Les cas classiques sont xe^x , $x \cos(x)$, $\ln(x)$ et $x^n e^x$. Ne l'emploie pas par réflexe : si une primitive est immédiate, elle reste le meilleur choix.

Repère d'abord la présence d'un produit, parfois implicite comme $\ln(x) \cdot 1$. Une IPP est pertinente si la dérivée d'un facteur simplifie réellement l'expression. Ainsi, dériver x donne 1, et dériver $\ln(x)$ donne $1/x$. En revanche, dériver une exponentielle ne la simplifie pas. Vérifie toujours l'intégrale obtenue avant de poursuivre : elle doit être plus accessible que celle du départ.

Effectuer une intégration par parties (1) - Terminale · Yvan Monka

Quelle est la formule de l'intégration par parties ?

Sans bornes, la formule est :

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx.$$

Avec des bornes a et b , elle devient :

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx.$$

Ici, u' désigne la dérivée de u , tandis que v est une primitive de v' . La formule vient de $(uv)' = u'v + uv'$. En intégrant cette égalité et en isolant $\int uv'$, on obtient l'IPP. Pour une intégrale définie, les crochets sont indispensables : $[uv]_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$.

Erreurs fréquentes : oublier le signe moins ; confondre u' et v' ; oublier le calcul aux bornes ; prendre une dérivée à la place d'une primitive. Écris toujours ton choix avant d'appliquer la formule.

Lire correctement une intégrale

$\int_a^b f(x) dx$ se lit « l'intégrale de f entre a et b ». La lettre x est une variable muette : elle peut être remplacée par une autre lettre. Le dx indique la variable

intégrée. Une intégrale définie donne un nombre ; une recherche de primitive donne une fonction, à une constante près.

Dans $\int_0^1 x e^x dx$, les nombres 0 et 1 fixent l'intervalle étudié. On ne remplace pas x par les bornes avant d'avoir trouvé une primitive ou appliqué l'IPP. À l'inverse, $\int x e^x dx$ ne comporte pas de bornes : le résultat attendu est une famille de primitives, complétée par une constante C .

Comment faire une intégration par parties ?

La qualité de la rédaction compte autant que le résultat. Pour une intégrale définie, indique aussi l'intervalle sur lequel les fonctions sont dérivables.

1. Repère le produit et demande-toi si une primitive directe existe.
2. Choisis u et v' : prends souvent le polynôme ou le logarithme comme u .
3. Calcule u' et une primitive v de v' .
4. Recopie la formule d'IPP avant de remplacer les expressions.
5. Simplifie l'intégrale restante, calcule les bornes puis conclus clairement.

La rédaction attendue est : « Posons $u(x) = \dots$ et $v'(x) = \dots$. Alors $u'(x) = \dots$ et $v(x) = \dots$ » L'exponentielle et les fonctions trigonométriques sont souvent choisies comme v' , car leurs primitives sont immédiates. Aucun automatisme ne dispense toutefois de contrôler le second terme.

Choisir u et v' sans se tromper

Pour $\int x e^x dx$, choisis $u = x$ et $v' = e^x$. Alors $u' = 1$ et $v = e^x$, donc l'intégrale restante est $\int e^x dx$, immédiate. Le choix inverse conserve $x e^x$ dans le second terme et ne simplifie rien. Pour $x^n e^x$ ou $x^n \sin(x)$, plusieurs IPP successives peuvent être nécessaires.

Une bonne IPP fait diminuer la difficulté. Les fonctions polynomiales sont particulièrement favorables, car leur dérivée réduit leur degré. Le logarithme est également un bon candidat pour u . En revanche, évite de prendre une fonction comme u si sa dérivée devient plus compliquée ou si l'intégrale restante ressemble exactement à l'intégrale initiale.

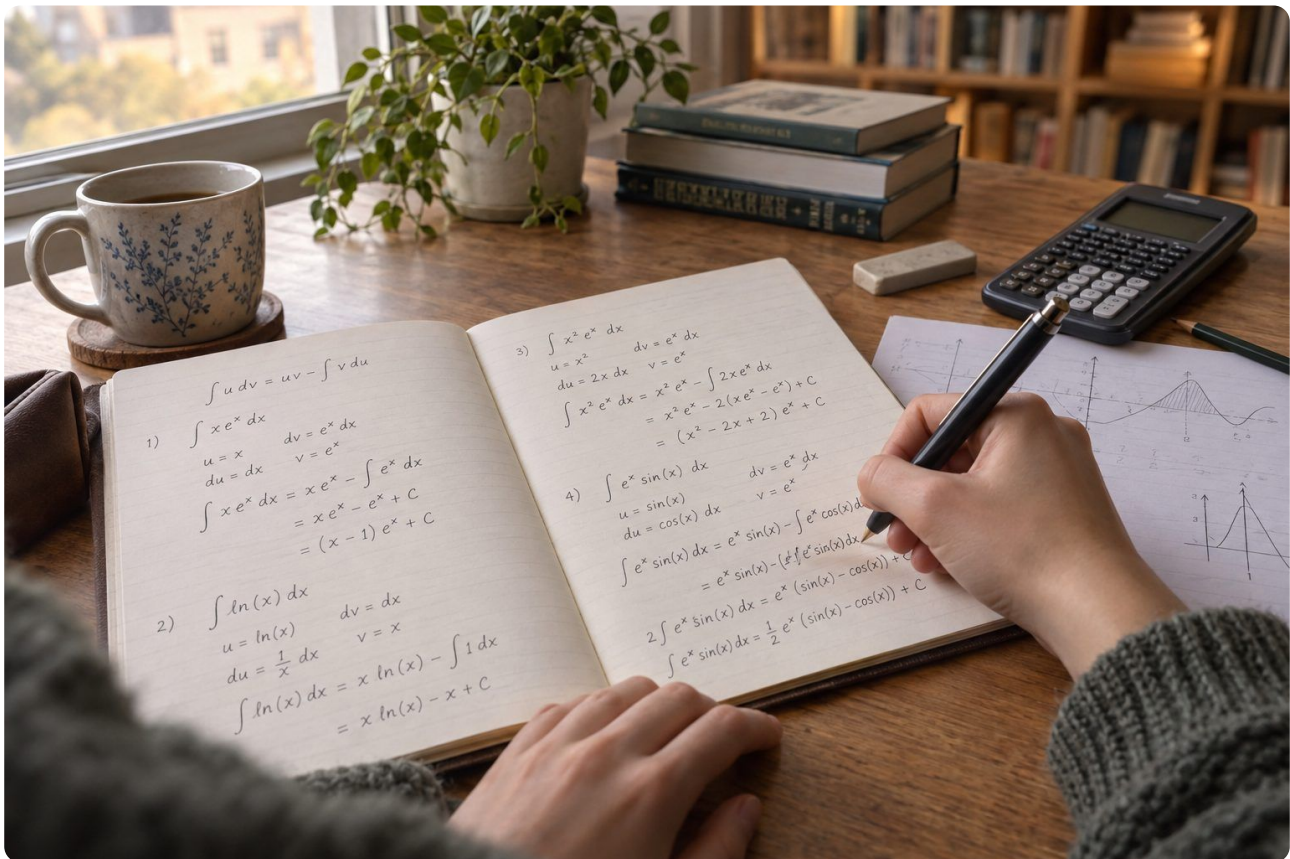
À retenir

Une IPP transforme l'intégrale d'un produit. Le choix de u doit rendre sa dérivée plus simple. Le signe moins est indispensable dans la formule. Enfin, une primitive trouvée se vérifie toujours par dérivation.

Dans le dernier exercice, le défi bonus demande une seconde IPP. Cherche d'abord seul la relation entre les deux intégrales avant de lire la correction.

- 1 Repérer un produit de fonctions.
- 2 Choisir u à dériver et v' à intégrer.
- 3 Calculer u' et une primitive v .
- 4 Appliquer $\int u'v = uv - \int uv'$.
- 5 Simplifier puis évaluer les bornes si nécessaire.

Les cinq étapes d'une intégration par parties



Exercice 1

$u = x$, $v' = e^x$, donc $u' = 1$ et $v = e^x$. Ainsi, $\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = (x - 1)e^x + C$. La dérivée de ce résultat vaut bien $x e^x$.

Exercice 2

Avec $u = x$, $v' = \cos(x)$, on a $u' = 1$, $v = \sin(x)$. Donc $\int_0^1 x \cos(x) dx = [x \sin(x)]_0^1 - \int_0^1 \sin(x) dx = \sin(1) + \cos(1) - 1$. Les crochets ont été évalués aux deux bornes.

Exercice 3

La bonne réponse est A. $u = \ln(x)$, $v' = 1$, donc $u' = 1/x$, $v = x$. Ainsi, $\int \ln(x) dx = x \ln(x) - \int 1 dx = x \ln(x) - x + C$. Le logarithme devient plus simple après dérivation.

Exercice 4

Sur $[1 ; e]$, posons $u(x) = \ln(x)$ et $v'(x) = 1$. Alors $u'(x) = 1/x$ et $v(x) = x$. Ainsi, $\int_1^e \ln(x) dx = [x \ln(x)]_1^e - \int_1^e 1 dx = e - (e - 1) = 1$. Les bornes 1 et e sont strictement positives, donc le logarithme y est défini.

Exercice 5

$\int_0^\pi x \sin(x) dx = [-x \cos(x)]_0^\pi + \int_0^\pi \cos(x) dx = \pi$. Le choix $u = x$ est efficace car sa dérivée est égale à 1.

Exercice 6

Faux : $(x \sin(x))' = \sin(x) + x \cos(x)$, donc un terme manque. Une primitive correcte est $x \sin(x) + \cos(x) + C$. En effet, la dérivée de $\cos(x)$ annule le terme $\sin(x)$.

Exercice 7

Pour $\varepsilon \in]0 ; 1[$, $I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} ([x^2/2 \ln(x)]_\varepsilon^1 - 1/2 \int_\varepsilon^1 x dx)$. Comme $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^2 \ln(\varepsilon) = 0$, on obtient $I = -1/4$.

Exercice 8

$I = [-x^2 \cos(x)]_0^\pi + \int_0^\pi 2x \cos(x) dx = \pi^2 + 2([x \sin(x)]_0^\pi - \int_0^\pi \sin(x) dx) = \pi^2 - 4$. Pour le bonus, $J = [x^2 \sin(x)]_0^\pi - \int_0^\pi 2x \sin(x) dx = -2\pi$. La seconde IPP traite le produit restant.

Pour réussir une intégration par parties, repère d'abord le facteur qui se simplifie en le dérivant. Écris ensuite le choix de u et de v' avant toute substitution dans la formule. Vérifie enfin les bornes et le signe devant la seconde intégrale. Imprime les exercices, rédige chaque étape et compare ton travail avec la correction.



Continue sur lycee-condorcet.fr

Lycée Condorcet - Document pédagogique