

Comment calculer la norme d'un vecteur à partir de ses coordonnées

Apprends à calculer la norme d'un vecteur avec la formule, une méthode pas à pas, 8 exercices et leur correction. Télécharge le PDF à imprimer.

Éducation lycée — méthodes, fi

Première

La norme d'un vecteur est sa longueur. Dans un repère orthonormé, pour un vecteur $\vec{u}(x ; y)$, on calcule $|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Le résultat est toujours positif ou nul, et il vaut zéro seulement pour le vecteur nul.

Un vecteur de coordonnées $(3 ; -4)$ a une norme de 5, et non de -1 ni de 7 : c'est le piège que beaucoup d'élèves rencontrent en additionnant ou en soustrayant les coordonnées au lieu de les élever au carré. Dans le chapitre Produit scalaire de deux vecteurs, cette longueur sert partout, car $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$. Tu trouves ici le cours, une méthode en étapes, des erreurs à éviter et des exercices corrigés.

La norme d'un vecteur est sa longueur : définition et formule dans un repère orthonormé

Objectif de la leçon : pouvoir dire « je sais calculer la norme d'un vecteur à partir de ses coordonnées ». Trois prérequis suffisent. Tu dois lire les coordonnées d'un vecteur, connaître le théorème de Pythagore et savoir simplifier une racine carrée. Le reste se construit en quelques lignes.

La norme du vecteur $\vec{u}$, notée $|\vec{u}|$, est sa longueur. Si $\vec{u} = \vec{AB}$, c'est la longueur du segment $[AB]$, donc $AB = |\vec{AB}|$.

Dans un repère orthonormé, pour $\vec{u}(x ; y)$, la formule de la norme s'écrit $|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Elle vient d'un triangle rectangle : le vecteur se décompose en un déplacement horizontal de longueur $|x|$ et un déplacement vertical de longueur $|y|$, côtés de l'angle droit. Pythagore donne le carré de l'hypoténuse : $x^2 + y^2$. Le

repère doit être orthonormé, c'est-à-dire des axes perpendiculaires avec la même unité sur chacun, sinon les longueurs sont faussées. Une norme est une grandeur positive ou nulle, et seul le *vecteur nul* a une norme égale à 0. Cette notion ouvre le chapitre Produit scalaire de deux vecteurs, où elle sert à mesurer des longueurs par le calcul.

Méthode pas à pas pour calculer une norme à partir des coordonnées ou de deux points

Que tu partes d'un vecteur ou de deux points, la méthode tient en quatre gestes.

1. Écris les coordonnées du vecteur. Avec deux points, calcule $(x_B - x_A ; y_B - y_A)$: arrivée moins départ.
2. Élève chaque coordonnée au carré.
3. Additionne les deux carrés.
4. Prends la racine carrée, puis simplifie si c'est possible.

Premier exemple, avec $\vec{u}(3 ; 4)$: $|\vec{u}| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$. Second exemple, avec $A(1 ; 2)$ et $B(4 ; 6)$: les coordonnées de $\vec{AB}$ sont $(4-1 ; 6-2) = (3 ; 4)$, donc $AB=5$. Les deux vecteurs sont identiques, la longueur aussi.

Une coordonnée négative ne change rien, puisque le carré l'efface. Pour $\vec{v}(2 ; -3)$, on obtient $|\vec{v}| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$. Comme 13 n'est pas un carré parfait, on garde la *valeur exacte* $\sqrt{13}$. Une écriture décimale (environ 3,6) sert seulement à contrôler l'ordre de grandeur, sauf si l'énoncé la demande. Avec $\sqrt{12}$, en revanche, simplifie en $2\sqrt{3}$.

Comment calculer la norme d'un vecteur ? · Mathemax

- 1 Écris les coordonnées du vecteur $(x ; y)$, ou calcule celles de AB avec B moins A .
- 2 Mets x et y au carré.
- 3 Additionne les deux carrés.
- 4 Prends la racine carrée du total.

5 Simplifie ou laisse la valeur exacte.

Les cinq étapes pour calculer la norme d'un vecteur à partir de ses coordonnées



Norme et produit scalaire : pourquoi $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$

Pourquoi un produit scalaire apparaît-il dès qu'on parle de longueur ? Parce qu'un vecteur multiplié scalairement par lui-même donne son **carré de la norme**. Avec $\vec{u}(x ; y)$ dans un repère orthonormé, $\vec{u} \cdot \vec{u} = x \times x + y \times y = x^2 + y^2 = |\vec{u}|^2$. Cette égalité entraîne l'identité $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2$, version vectorielle de $(a+b)^2$.

Vérifions-la avec $\vec{u}(1 ; 2)$ et $\vec{v}(3 ; -1)$. Le produit scalaire vaut $1 \times 3 + 2 \times (-1) = 1$, avec $|\vec{u}|^2 = 5$ et $|\vec{v}|^2 = 10$. La somme $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(4 ; 1)$, donc $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = 16 + 1 = 17$, soit bien $5 + 2 \times 1 + 10$. Les deux chemins se rejoignent.

L'égalité est précieuse quand on connaît des longueurs et un produit scalaire, mais *aucune coordonnée*. C'est le cas d'un triangle où l'on donne AB, AC et



$\vec{AB} \cdot \vec{AC}$: on en déduit BC avec $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$. Quand les coordonnées sont données, la formule directe va plus vite et expose à moins d'erreurs.

Quatre erreurs de calcul qui font perdre des points sur une norme

Erreurs fréquentes. Première faute : s'arrêter avant la racine. Écrire $|\vec{u}| = 25$ pour $\vec{u}(3 ; 4)$ donne le carré de la longueur ; la bonne réponse est 5. Deuxième faute : inverser les points. Avec $A(1 ; 2)$ et $B(4 ; 6)$, partir de A moins B donne $(-3 ; -4)$. La norme reste 5, mais le vecteur opposé fausse ensuite tout produit scalaire.

Troisième faute : lire $(-3)^2$ comme -9 . Un carré n'est jamais négatif, donc une somme de carrés non plus. Quatrième faute : écrire $\sqrt{x^2 + y^2} = x + y$. Avec $(3 ; 4)$, on trouverait 7 au lieu de 5, car la racine d'une somme n'est pas la somme des racines. Un contrôle rapide : la norme est au moins égale à chaque $|x|$ et $|y|$, et au plus égale à $|x| + |y|$. Enfin, *vérifie l'orthonormalité* du repère avant d'appliquer la formule.

[Continue sur lycee-condorcet.fr](https://lycee-condorcet.fr)

Lycée Condorcet - Document pédagogique