Lycée Condorcet

Comment rédiger une récurrence en Terminale sans oublier une étape

Apprends à rédiger une récurrence : leçon, méthode en trois blocs, exercices corrigés et PDF à imprimer pour t'entraîner en Terminale.

Éducation lycée — méthodes, fi

Terminale

Correction

1. **Somme des cubes.** Initialisation : pour n = 0, la somme vide vaut 0 et $0^2 \times 1^2/4 = 0$. Hérédité : soit n fixé tel que $1^3 + \ldots + n^3 = n^2(n+1)^2/4$. On ajoute $(n+1)^3$: $n^2(n+1)^2/4 + (n+1)^3 = (n+1)^2\,(n^2/4 + n + 1) = (n+1)^2\,(n^2 + 4n + 4)/4 = (n+1)^2(n+2)^2/4$, soit la formule au rang n+1. Conclusion : par récurrence, l'égalité est vraie pour tout n.
2. **Divisibilité.** Initialisation : 4^0 vaut 1, donc $4^0 - 1$ vaut 0, multiple de 3. Hérédité : soit n fixé tel que $4^n - 1$ s'écrive 3k avec k entier. Alors $4^{n+1} - 1$ s'écrit $4(4^n - 1) + 3$, soit $4 \times 3k + 3$, c'est-à-dire $3(4k + 1)$, multiple de 3. Conclusion : par récurrence, 3 divise $4^n - 1$ pour tout n.
3. **Suite.** Encadrement. Initialisation : $u_0 = 1$ et $0 \leq 1 \leq 1$. Hérédité : si $0 \leq u_n \leq 1$, alors $0 \leq u_n/2 \leq 1/2$, puis $1/4 \leq u_{n+1} \leq 3/4$, donc $0 \leq u_{n+1} \leq 1$. Conclusion : l'encadrement vaut pour tout n. Décroissance. Initialisation : $u_1 = 1/2 + 1/4 = 3/4 \leq 1 = u_0$. Hérédité : si $u_{n+1} \leq u_n$, alors $u_{n+1}/2 + 1/4 \leq u_n/2 + 1/4$, c'est-à-dire $u_{n+2} \leq u_{n+1}$. Conclusion : la suite est décroissante.
4. **Inégalité.** Initialisation : pour n = 4, on a $2^4 = 4^2$, donc $2^4 \geq 4^2$. Hérédité : soit $n \geq 4$ fixé tel que $2^n \geq n^2$. Alors $2^{n+1} = 2 \times 2^n \geq 2n^2$. Or $2n^2 - (n+1)^2 = n^2 - 2n - 1 = (n-1)^2 - 2$, positif car $n-1 \geq 3$. Donc $2^{n+1} \geq (n+1)^2$. Conclusion : l'inégalité est vraie pour tout $n \geq 4$. Elle est fausse en 3 ($8 < 9$), ce qui justifie le rang de départ.
5. **Copie fautive.** Trois erreurs. Dans l'hérédité, l'hypothèse n'est jamais énoncée ni utilisée, et la copie part de la conclusion à démontrer. La conclusion affirme que la vérification en n = 1 suffit, alors que la

transmission n'est pas établie. Version corrigée. Initialisation : pour n = 1, on a 1 = (1 × 2)/2. Hérédité : soit n ≥ 1 fixé tel que 1 + … + n = n(n+1)/2. Alors 1 + … + n + (n+1) = n(n+1)/2 + (n+1) = (n+1)(n+2)/2. Conclusion : par récurrence, l'égalité est vraie pour tout n ≥ 1.

Continue sur lycee-condorcet.fr

Lycée Condorcet - Document pédagogique