Lycée Condorcet

Comment rédiger une récurrence en Terminale sans oublier une étape

Apprends à rédiger une récurrence : leçon, méthode en trois blocs, exercices corrigés et PDF à imprimer pour t'entraîner en Terminale.

Éducation lycée — méthodes, fi

Terminale

Le raisonnement par récurrence démontre qu'une propriété est vraie pour tous les entiers à partir d'un certain rang. On vérifie d'abord qu'elle est vraie au premier rang (initialisation), puis que, si elle est vraie à un rang n, elle l'est au rang n+1 (hérédité).

Une copie de bac perd souvent des points sur une récurrence dont tous les calculs sont justes. La cause tient presque toujours à la rédaction : un rang de départ oublié, une hérédité qui suppose ce qu'elle doit prouver, une hypothèse jamais utilisée. Tu trouves ici un modèle à recopier, les erreurs de copie démontées une à une et des exercices corrigés.

Comprendre le principe de la récurrence avec l'image des dominos

Le chapitre « Le raisonnement par récurrence » de Terminale spécialité mathématiques repose sur une seule idée. Imagine une rangée de dominos : le premier tombe, et chaque domino qui tombe fait tomber le suivant. Alors tous tombent. Le programme admet ce principe, qui correspond à l'un des axiomes de Peano. On n'affirme pas que chaque domino est déjà tombé, seulement que sa chute entraînerait celle du suivant.

Deux notions se confondent souvent. Une **suite définie par récurrence** se donne par un premier terme et une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$: c'est un objet mathématique. Le raisonnement par récurrence, lui, est une méthode de démonstration, souvent employée pour ces suites. Vérifier la propriété pour n = 0, n = 1 et n = 2 ne prouve rien pour tout n, alors que la méthode couvre d'un

coup une infinité de cas. Sois à l'aise avec les notations u_n et u_{n+1}, les inégalités et la factorisation. La récurrence double ou forte dépasse ce cadre.

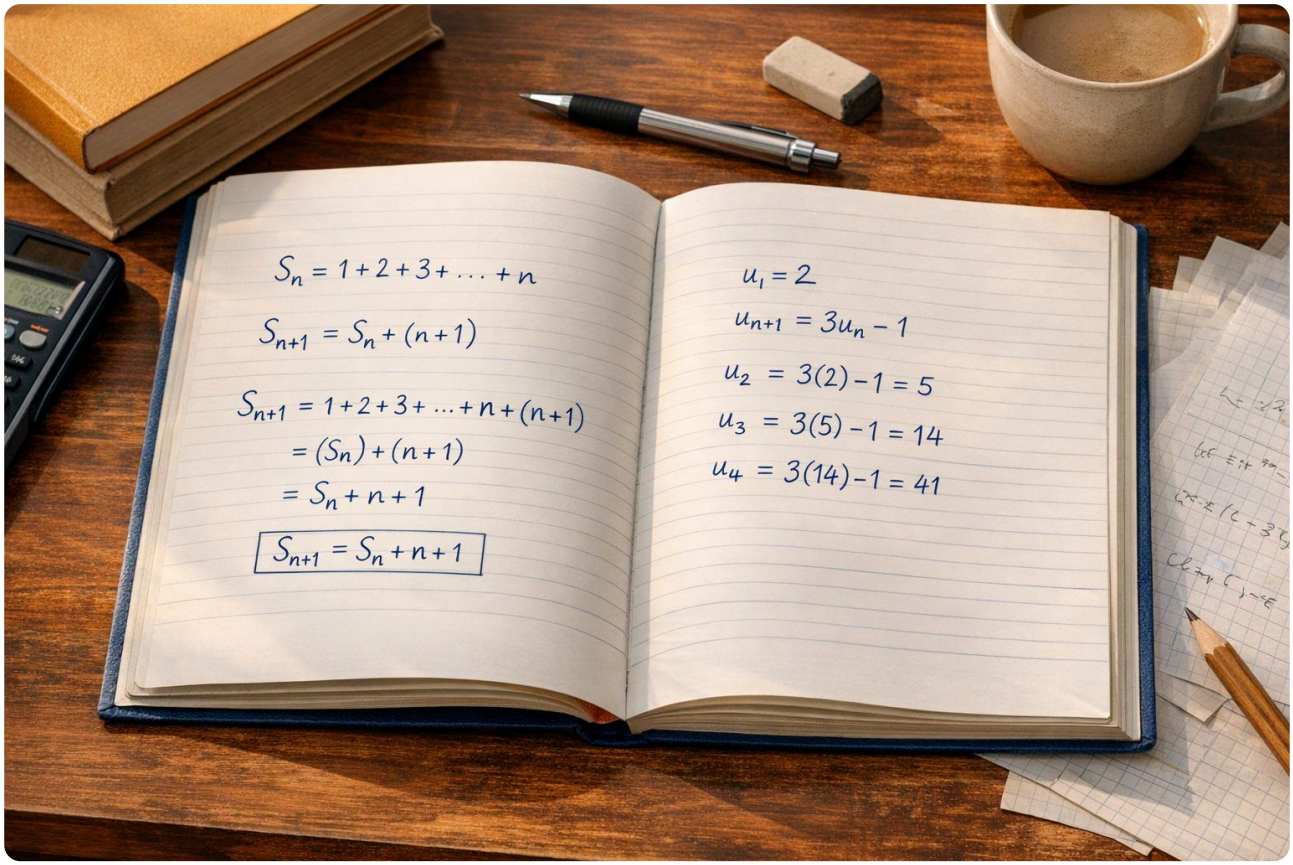
Rédiger une récurrence en trois étapes : initialisation, hérédité, conclusion

Commence par nommer la **propriété P(n)** et le rang à partir duquel tu la démontres. La trame ci-dessous se recopie telle quelle, en changeant seulement la propriété.

1. Énonce la propriété : « Soit P(n) la propriété … ; montrons qu'elle est vraie pour tout entier $n \geq n_0$. »
2. Initialisation : au rang n_0, calcule séparément les deux membres (ou vérifie l'inégalité) et constate que $P(n_0)$ est vraie.
3. Hérédité, point de départ : « Soit $n \geq n_0$ fixé. Supposons que P(n) soit vraie. » Recopie l'hypothèse de récurrence en toutes lettres.
4. Hérédité, calcul : pars du rang n+1, fais apparaître l'hypothèse dans le calcul, puis arrive exactement à l'expression attendue au rang n+1.
5. Conclusion : « Par récurrence, P(n) est vraie pour tout entier $n \geq n_0$. »

L'**hérédité** concentre les difficultés. Dire que n est *fixé* ne signifie pas qu'on démontre P(n) : on démontre une implication, « si P(n), alors P(n+1) ». L'hypothèse est admise le temps du raisonnement, jamais conclue. Sans initialisation, cette implication ne s'appuie sur aucun cas vrai. C'est la conclusion qui donne l'affirmation « pour tout n ».

Ressource vidéo : la récurrence en 5 min, programme de spécialité mathématiques en Terminale (chaîne NOVELCLASS).



Deux exemples rédigés : une somme d'entiers et une suite

Démontrons que, pour tout entier naturel n, 1 + 2 + … + n = n(n+1)/2. Initialisation : pour n = 0, la somme vide vaut 0 et (0 × 1)/2 = 0. Hérédité : soit n fixé tel que 1 + … + n = n(n+1)/2. On ajoute n+1 aux deux membres : 1 + … + n + (n+1) = n(n+1)/2 + (n+1). Le geste décisif est de **factoriser par n+1** : on obtient (n+1)(n/2 + 1) = (n+1)(n+2)/2, soit la formule au rang n+1. Conclusion : l'égalité est vraie pour tout n ∈ ℕ.

Pour une suite, prends $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n/2 + 1/4$, et montre que $0 \le u_n \le 1$. Au rang 0, $u_0 = 1$ convient. Pour l'hérédité, on part de $0 \le u_n \le 1$, on divise par 2, puis on ajoute 1/4 : $1/4 \le u_{n+1} \le 3/4$, donc $0 \le u_{n+1} \le 1$. Le squelette reste le même pour la décroissance : on démontre $u_{n+1} \le u_n$, avec l'initialisation $u_1 = 3/4 \le u_0 = 1$. Si $u_{n+1} \le u_n$, alors $u_{n+1}/2 + 1/4 \le u_n/2 + 1/4$, c'est-à-dire $u_{n+2} \le u_{n+1}$. Ce passage marche parce que la fonction f est **croissante** ; avec une fonction décroissante, l'inégalité changerait de sens.

Quand choisir la récurrence et quelles erreurs éviter à l'écrit

Choisis la récurrence quand la propriété porte sur tous les entiers et que le rang n+1 se déduit naturellement du rang n : sommes, inégalités sur une suite, monotonie, divisibilité. Pour ce dernier cas, $4^{n+1} - 1$ s'écrit $4(4^n - 1) + 3$, ce qui montre vite que 3 divise $4^n - 1$. La méthode est moins utile quand une formule explicite suffit : pour une suite arithmétique, le terme général $u_n = u_0 + nr$ est connu, inutile de le redémontrer. Pour calibrer le niveau attendu, le programme officiel de Terminale et les ressources Éduscol restent la référence.

Côté copie, trois erreurs reviennent. Première : une hérédité qui **suppose la conclusion**. On écrit la formule au rang n+1, on développe les deux côtés, on trouve deux expressions égales et on déclare « c'est vrai ». Il faut partir du membre de gauche au rang n+1, utiliser l'hypothèse, puis atteindre le membre de droite. Deuxième : une hypothèse jamais utilisée. Si P(n) n'apparaît dans aucune ligne du calcul, celui-ci démontre autre chose. Troisième : le rang de départ. Pour $2^n \geq n^2$, la propriété est vraie en 0,1 et 2, fausse en 3 ($8 < 9$), puis vraie pour tout $n \geq 4$. On la démontre donc pour $n \geq 4$, avec l'initialisation en 4 ($2^4 = 4^2$, l'inégalité large est vérifiée). L'hérédité s'appuie sur $2^{n+1} = 2 \times 2^n \geq 2n^2 \geq (n+1)^2$, valable dès $n \geq 3$. Dernier piège : la conclusion oubliée, qui laisse la démonstration inachevée.

Erreur	Copie fautive	Version corrigée
Hérédité qui suppose la conclusion	« Je veux 1 + … + (n+1) = (n+1)(n+2)/2. Je développe : les deux membres valent (n² + 3n + 2)/2. Donc c'est vrai. »	On part de 1 + … + (n+1), on remplace 1 + … + n par n(n+1)/2 grâce à l'hypothèse, puis on factorise par n+1 pour obtenir (n+1)(n+2)/2.
Hypothèse non utilisée	« On écrit $4^{n+1} - 1$ sous la forme $4(4^n - 1) + 3$. Les deux termes sont multiples de 3, donc c'est vrai. » Rien ne justifie le premier terme.	Par hypothèse, $4^n - 1$ vaut 3k avec k entier. Alors $4(4^n - 1) + 3$ vaut $4 \times 3k + 3$, soit $3(4k + 1)$, multiple de 3.
Rang de départ faux	« Pour $2^n \geq n^2$, initialisation en 0 : $1 \geq 0$. Hérédité : $2^{n+1} \geq 2n^2 \geq (n+1)^2$, donc c'est vrai pour tout n. » Or $2n^2$	Initialisation en 4, hérédité pour $n \geq 4$ (donc $n-1 \geq 3$), conclusion limitée à $n \geq 4$.

Erreur	Copie fautive	Version corrigée
	$\geq (n+1)^2$ échoue en 2 ($8 < 9$) et la propriété est fausse en 3.	

À retenir : l'initialisation prouve un premier cas, l'hérédité garantit la transmission d'un rang au suivant, la conclusion généralise à tous les rangs. Avant de rendre ta copie, pose-toi une question : ai-je utilisé l'hypothèse de récurrence dans mon calcul ?

Télécharge le PDF, imprime-le et refais les exercices sans regarder la correction, puis compare ta rédaction au modèle.

On répond à vos questions

Quand faire un raisonnement par récurrence ?

Quand tu dois prouver une propriété pour tous les entiers à partir d'un certain rang et que le passage de n à n+1 est naturel : sommes, inégalités sur une suite, monotonie, divisibilité. Si une formule explicite ou un calcul direct règle la question, la récurrence est superflue.

Comment bien rédiger une récurrence ?

Énonce P(n) et le rang de départ, vérifie l'initialisation, fixe n et écris l'hypothèse de récurrence. Pars ensuite du rang n+1 en faisant apparaître cette hypothèse jusqu'à l'expression attendue. Termine par la conclusion : par récurrence, P(n) est vraie pour tout n au moins égal au rang de départ.

Qu'est-ce qu'un raisonnement par récurrence pour un scientifique ?

C'est une méthode de démonstration, pas une observation répétée. Elle établit qu'une propriété vaut pour une infinité d'entiers grâce à un premier cas vérifié et à une règle de transmission. Elle diffère de l'induction expérimentale, qui généralise à partir d'exemples sans apporter de preuve.

Quelle est la définition de la récurrence ?

En mathématiques, le mot désigne soit le raisonnement qui démontre une propriété pour tous les entiers à partir d'un rang, soit la façon de définir une suite terme après terme. Dans la langue courante, il désigne le fait de se reproduire, de revenir à intervalles plus ou moins réguliers.

Qu'est-ce qu'une suite définie par récurrence ?

C'est une suite donnée par son premier terme et par une relation qui calcule chaque terme à partir du précédent, par exemple $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n/2 + 1/4$. Elle ne donne pas directement u_n en fonction de n, d'où l'intérêt des démonstrations par récurrence.

Comment démontrer par récurrence qu'une suite est décroissante ?

Pose P(n) : $u_{n+1} \leq u_n$. Vérifie $u_1 \leq u_0$, puis suppose $u_{n+1} \leq u_n$ et applique la fonction f de la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ pour obtenir $u_{n+2} \leq u_{n+1}$. Cela suppose que f soit croissante. Conclus pour tout n.

Continue sur lycee-condorcet.fr

Lycée Condorcet - Document pédagogique