

Suite arithmético-géométrique : méthode simple et exercices

Définition, méthode, erreurs fréquentes et exercices corrigés pour maîtriser la suite arithmético-géométrique au lycée et en prépa.

Éducation lycée — méthodes, fi

Mis à jour le 29 avril 2026

Une suite arithmético-géométrique vérifie une relation de récurrence de la forme $u(n+1) = a \cdot u(n) + b$. Pour l'étudier, on cherche souvent sa valeur d'équilibre puis on transforme la suite en suite géométrique à l'aide d'un changement de variable.

Tu lis $u(n+1) = 0,8u(n) + 3$ et tu hésites : suite géométrique, suite arithmétique, ou autre chose ? C'est précisément le type de confusion que je rencontre souvent en copie, au lycée comme en khâgne. La bonne nouvelle, c'est qu'une suite arithmético-géométrique se reconnaît vite si l'on sait repérer sa structure. Ensuite, la méthode est très stable : identifier la forme, chercher le point fixe, poser une nouvelle suite, puis rédiger proprement. Avec une fiche claire, quelques réflexes de justification et des exemples bien choisis, ce chapitre devient beaucoup plus accessible.

En bref : les réponses rapides

Quand une suite arithmético-géométrique admet-elle une limite ? — Si $a \neq 1$ et $|a| < 1$, la suite converge vers le point fixe $\alpha = b/(1-a)$. Dans les autres cas, il faut discuter selon la valeur de a et le terme initial.

Pourquoi introduire une suite auxiliaire $v_n = u_n - \alpha$? — Cette translation recentre la suite autour de son point fixe. On obtient alors une relation géométrique simple $v(n+1) = a v(n)$, beaucoup plus facile à résoudre.

Comment reconnaître rapidement une suite arithmético-géométrique dans un exercice ? — Il faut repérer une récurrence affine du type terme suivant = $a \times$ terme précédent + b , avec a et b constants. Si $b = 0$, on retombe sur une suite géométrique ; si $a = 1$, sur une suite arithmétique.

Comment calculer la somme des premiers termes d'une suite arithmético-géométrique ? — On commence en général par écrire le terme général. Ensuite, on

décompose la somme en une partie constante et une somme géométrique, ce qui donne une expression fermée en fonction de n .

Suite arithmético géométrique : définition, repère immédiat et cas particuliers

Une **suite arithmético-géométrique** vérifie une relation de récurrence du type $u_{n+1} = au_n + b$. Elle combine deux actions : on multiplie par a , puis on ajoute b . Pour la reconnaître vite, cherchez cette forme exacte et séparez aussitôt les cas $b=0$ et $a=1$.

La **suite arithmético-géométrique définition** tient en une phrase rigoureuse : c'est une suite définie par **récurrence** telle que, pour tout entier n , on a

$$u_{n+1} = au_n + b$$

où a et b sont des constantes réelles fixées. Le mot est parlant. Il y a une part *géométrique*, car on multiplie par a . Il y a une part *arithmétique*, car on ajoute b . Cette structure apparaît très souvent en lycée, puis en prépa, dans des contextes de population, de capital, de température, de probabilité ou d'algorithme. En copie, je conseille de vérifier un point simple : a **et** b **ne dépendent pas de** n . Si l'énoncé donne $u_{n+1} = 2u_n + 3$, vous êtes dans le bon cadre. Si l'énoncé donne $u_{n+1} = 0.5u_n + 1$, ce n'est plus une suite arithmético-géométrique au sens classique.

La différence avec une **suite géométrique** et une **suite arithmétique** doit être nette. Une suite géométrique vérifie

$$u_{n+1} = qu_n$$

avec seulement une multiplication. Une suite arithmétique vérifie

$$u_{n+1} = u_n + r$$

avec seulement un ajout constant. La forme $u_{n+1} = au_n + b$ mélange les deux mécanismes. C'est précisément ce mélange qui piège beaucoup d'élèves. Ils cherchent un rapport constant, puis une différence constante, et concluent à tort que la suite n'entre dans aucune catégorie utile. Autre confusion fréquente : la **moyenne arithmético-géométrique**. Ce n'est pas le même objet. La moyenne arithmético-géométrique est un

procédé sur deux suites couplées, utilisé dans un cadre bien plus avancé. Ici, on parle d'**une seule suite**, définie par une relation affine de récurrence.

Les cas particuliers servent de repère immédiat en exercice. Si $b = 0$, alors

$$u_{n+1} = au_n$$

et on retrouve une **suite géométrique** de raison a . Si $a = 1$, alors

$$u_{n+1} = u_n + b$$

et on retrouve une **suite arithmétique** de raison b . Le cas vraiment spécifique est donc $a \neq 1$ avec souvent $b \neq 0$. C'est celui qu'on traite par changement de variable ou par recherche d'un point fixe. En pratique, un énoncé comme "chaque année, la population conserve 80% de ses effectifs puis gagne 120 habitants" donne

$$u_{n+1} = 0,8u_n + 120.$$

Un autre, très classique, dit : "le capital est multiplié par 1,02, puis on retire 50 euros". On obtient encore une suite arithmético-géométrique. Le bon réflexe est de traduire les mots "fois" et "plus ou moins" par la forme affine.

À retenir

Repérez d'abord la forme exacte

$$u_{n+1} = au_n + b.$$

Si $b = 0$, la suite est géométrique. Si $a = 1$, elle est arithmétique. Si $a \neq 1$ et $b \neq 0$, vous êtes dans le cas général d'une vraie suite arithmético-géométrique.

La méthode qui marche à tous les coups pour exprimer la suite en fonction de n

Pour obtenir une **suite arithmético-géométrique en fonction de n**, pars de la forme $u_{n+1} = au_n + b$. Cherche le **point fixe** α tel que $\alpha = a\alpha + b$, puis pose $v_n = u_n - \alpha$. Cette **suite auxiliaire** devient géométrique, donc son **terme général** se calcule vite et sans piège.

La méthode tient en quatre gestes, toujours dans le même ordre. Tu repères d'abord les coefficients de la **fonction affine** : dans $u_{n+1} = au_n + b$, le coefficient de u_n est a et le terme ajouté est b . Ensuite, si $a \neq 1$, tu calcules le **point fixe** en résolvant $\alpha = a\alpha + b$, soit

$$\alpha = \frac{b}{1-a}.$$

Puis tu poses la **suite auxiliaire** $v_n = u_n - \alpha$. Le calcul clé est court :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \alpha = au_n + b - \alpha = a(u_n - \alpha) = av_n,$$

car $u_{n+1} = au_n + b$. Par conséquent, (v_n) est géométrique de raison a , donc

$$v_n = v_0 a^n = (u_0 - \alpha) a^n.$$

Enfin, tu reviens à la suite initiale :

$$u_n = \alpha + (u_0 - \alpha) a^n.$$

Voilà la **formule suite arithmético-géométrique** la plus sûre. Elle évite les tâtonnements et fonctionne aussi bien au bac qu'en prépa.

Pourquoi cette translation marche-t-elle ? Parce qu'on recentre la suite autour d'une valeur qui reste fixe par la récurrence. Le nombre α vérifie en effet la même relation que les termes de la suite, sauf qu'il ne bouge pas. En soustrayant α , on supprime le terme constant b , ce qui transforme une récurrence affine en récurrence multiplicative. C'est exactement le passage d'une suite arithmético-géométrique à une suite géométrique. Prenons un exemple fil rouge : $u_{n+1} = 2u_n + 3$ avec $u_0 = 1$. On résout $\alpha = 2\alpha + 3$, donc $\alpha = -3$. On pose alors $v_n = u_n + 3$.

Ainsi,

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 3 = 2u_n + 6 = 2(u_n + 3) = 2v_n.$$

La raison vaut donc 2 , et $v_0 = 1 + 3 = 4$. D'où

$$v_n = 4 \times 2^n,$$

puis

$$u_n = 4 \times 2^n - 3.$$

Tu obtiens ici le **terme général** sans développer terme à terme, ce qui fait gagner du temps et limite les erreurs.

Le cas $a = 1$ se traite à part, et il faut le signaler. Si $u_{n+1} = au_n + b$, la relation devient simplement arithmétique : il n'existe pas de *point fixe unique*, sauf si $b = 0$. La suite vérifie alors

$$u_n = u_0 + nb.$$

En revanche, dès que $a \neq 1$, la méthode du point fixe reste la bonne. En copie, la **rédaction type** attendue est brève : "On considère x tel que $x = ax + b$, soit $x = \frac{b}{1-a}$. On pose $v_n = u_n - \alpha$. Alors $u_{n+1} = au_{n+1} + b - \alpha = a(u_n - \alpha) + \alpha = av_n$. La suite (v_n) est donc géométrique de raison a , d'où $v_n = (u_0 - \alpha)a^n$. Finalement, $u_n = \alpha + (u_0 - \alpha)a^n$." C'est suffisant, à condition d'écrire l'égalité qui prouve que (v_n) est géométrique. Sans cette ligne, la justification est incomplète.

À retenir

Si $u_{n+1} = au_n + b$ avec $a \neq 1$, la bonne formule est

$$u_n = \frac{b}{1-a} + \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right)a^n.$$

Si $a = 1$, alors

$$u_n = u_0 + nb.$$

[EM#2] Suites arithmético-géométriques (Démonstration) — Øljen - Les maths en finesse

Cas particulier $a = 1$: pourquoi la méthode change

Si $a = 1$, la suite n'est **plus** une vraie suite arithmético-géométrique au sens usuel. La relation devient $u_{n+1} = u_n + b$. On ne cherche donc plus un **point fixe** avec $x = ax + b$, car l'équation $x = x + b$ ne donne rien d'exploitable, sauf si $b = 0$. La bonne lecture est immédiate : la différence $u_{n+1} - u_n$ vaut toujours b , donc la suite est *arithmétique*.

Par conséquent, on applique la formule adaptée : si la suite commence à l'indice 0 , alors

$$u_n = u_0 + nb.$$

Si elle commence à l'indice 1 , on écrit

$$u_n = u_1 + (n-1)b.$$

Ce **changement de méthode** est un piège classique en copie : beaucoup d'élèves tentent malgré tout la translation $u_n - \ell$, alors que cette technique suppose justement $a \neq 1$. Retenez ce réflexe simple : dès que $a = 1$, pensez *suite arithmétique*, pas suite géométrique cachée.

Erreurs fréquentes en copie : le tableau qui évite les pièges classiques

Les **erreurs fréquentes suite arithmético-géométrique** reviennent presque toujours en **copie de bac** : confusion avec la **moyenne arithmético-géométrique**, oubli du **point fixe**, traitement maladroit du cas $a = 1$ ou **justification** insuffisante de la **limite**. Un bon tableau de vigilance corrige ces *pièges* dès la lecture de l'énoncé et sécurise la démonstration.

En pratique, une suite arithmético-géométrique vérifie $u_{n+1} = au_n + b$. La méthode standard consiste souvent à chercher le **point fixe** ℓ tel que $\ell = a\ell + b$, puis à poser $v_n = u_n - \ell$. Beaucoup d'élèves connaissent la recette, mais se trompent dans les détails d'écriture. Or ce sont ces détails qui font perdre des points. Le tableau suivant cible les confusions les plus classiques, avec une formulation directement réutilisable dans une rédaction de bac ou de prépa.

Erreur fréquente	Pourquoi c'est faux	Bon réflexe	Formulation correcte à écrire
Confondre avec la moyenne arithmético-géométrique	Ce n'est pas une récurrence de type $u_{n+1} = au_n + b$.	Identifier la forme exacte de l'énoncé.	« La suite est arithmético-géométrique car $u_{n+1} = au_n + b$. »
Oublier le point fixe	On rate la transformation en suite géométrique.	Résoudre $\ell = a\ell + b$ si $a \neq 1$.	« On pose $\ell = \frac{b}{1-a}$, »

Erreur fréquente	Pourquoi c'est faux	Bon réflexe	Formulation correcte à écrire
			puis $u_n = u_0 + \ell$. »
Traiter sans précaution le cas $\alpha = 1$	La formule $\frac{A}{1-\alpha}$ n'a plus de sens.	Revenir à $u_{n+1} = u_n + b$, donc suite arithmétique.	« Si $\alpha = 1$, alors $u_{n+1} = u_n + b$ et $u_n = u_0 + n b$. »
Confondre u_n et v_n	On donne la formule explicite de la mauvaise suite.	Écrire d'abord v_n , puis revenir à $u_n = v_n + \ell$.	« Comme $v_n = v_0 a^n$, on obtient $u_n = \ell + (u_0 - \ell) a^n$. »
Mal justifier la limite	Dire « ça converge » sans condition sur α ne suffit pas.	Étudier a^n puis conclure selon $ a < 1$, $a = 1$ ou autre cas.	« Si $ a < 1$, alors $a^n \rightarrow 0$, donc $u_n \rightarrow \ell$. »
Traiter la somme des premiers termes sans formule explicite	La somme des premiers termes devient opaque et souvent fausse.	Exprimer d'abord u_n , puis sommer une constante et une géométrique.	« On utilise $u_n = \ell + (u_0 - \ell) a^n$ pour calculer $\sum_{k=0}^n u_k$. »

Mon conseil de professeur pour vérifier un résultat en **20 secondes** : remplacez votre formule explicite dans la relation $u_{n+1} = a u_n + b$. Si l'égalité échoue, la démonstration est fautive. Vérifiez aussi que le **point fixe** annoncé satisfait bien $\ell = a \ell + b$. Enfin, pour la **limite**, une phrase de justification doit toujours mentionner le comportement de a^n , jamais une simple intuition.

Exercices corrigés progressifs : reconnaître, rédiger, puis traiter somme et limite

Pour progresser vite, entraînez-vous sur **trois gestes** : reconnaître une relation de la forme $u_{n+1} = a u_n + b$, transformer la suite en **suite géométrique** grâce à un décalage bien choisi, puis traiter les deux questions classiques, la **somme des premiers termes** et la **convergence**. Un bon *suite arithmético-géométrique exercice corrigé* montre la rédaction, pas seulement le résultat.

Exercice 1. On donne $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + 3$. Le critère de reconnaissance est simple : la relation de récurrence fait intervenir une **fonction affine** de $x \mapsto 2x + 3$. On cherche le point fixe ℓ tel que $\ell = 2\ell + 3$, donc $\ell = -3$. On pose alors $v_n = u_n + 3$, ainsi $v_{n+1} = u_{n+1} + 3 = 2u_n + 6 = 2(u_n + 3) = 2v_n$. La suite (v_n) est géométrique de raison 2 et $v_0 = 4$, donc $v_n = 4 \times 2^n$. Par conséquent,

$$u_n = 4 \times 2^n - 3.$$

La **réduction type** tient en trois lignes : point fixe, changement de variable, conclusion. Piège fréquent : écrire directement une formule sans justifier le choix de ℓ . Micro-vérification utile : $u_1 = 2 \times 1 + 3 = 5$, et la formule donne $4 \times 2 - 3 = 5$.

Exercice 2. Niveau bac. Une entreprise compte u_n abonnés au mois n , avec $u_0 = 200$ et $u_{n+1} = 0,8u_n + 50$. C'est encore une suite arithmético-géométrique, car u_{n+1} dépend affinement de u_n . Le point fixe vérifie $\ell = 0,8\ell + 50$, donc $\ell = 250$. On pose $v_n = u_n - 250$; alors $v_{n+1} = 0,8v_n$, d'où $v_n = (u_0 - 250) \times 0,8^n = -50 \times 0,8^n$. Ainsi,

$$u_n = 250 - 50 \times 0,8^n.$$

Pour la monotonie, on observe que $0 < 0,8^n \leq 1$, donc $u_n < 250$ et u_n augmente vers 250. Cette **limite suite arithmético-géométrique** se lit ici économiquement : l'effectif se stabilise. Piège classique : affirmer la croissance sans montrer le signe de $u_{n+1} - u_n$. Or

$$u_{n+1} - u_n = 50 - 0,2u_n,$$

ce qui est positif tant que $u_n < 250$. La justification devient alors solide, ce qu'attendent bac et parents qui relisent une copie.

Exercice 3. Niveau avancé, voire **exercice corrigé prépa**. Soit $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = au_n + 2$, où $a \in \mathbb{R}$. On demande u_n , puis la **suite arithmético-géométrique somme** $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$, enfin la **convergence**. Si $a \neq 1$, le point fixe vaut $\ell = \frac{2}{1-a}$. En posant $v_n = u_n - \ell$, on obtient $v_{n+1} = av_n$, donc $v_n = (u_0 - \ell)a^n = -\ell a^n$. Ainsi

$$u_n = \ell(1 - a^n) = \frac{2(1 - a^n)}{1 - a}.$$

On en déduit $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{2(1 - a^k)}{1 - a} = \frac{2}{1 - a} \left((n+1) - \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \right)$, $\text{quand } a \neq 1$. Si $a = 1$, alors $u_n = 2n$ et $S_n = n(n+1)$. Pour la limite, si $|a| < 1$, alors $a^n \rightarrow 0$ et $u_n \rightarrow \frac{2}{1-a}$. En revanche, si $a \geq 1$, la suite ne converge pas ; si $a \leq -1$, elle diverge aussi,

souvent par oscillation. Le piège majeur consiste à annoncer une limite sans discuter les valeurs de a . Pour s'entraîner, vous pouvez compléter avec un PDF de cours ou un manuel de référence du site.

Comment conclure sur la limite sans se tromper

Si tu obtiens $u_n = \alpha + (u_0 - \alpha)a^n$ avec $a \neq 1$, la conclusion vient presque toujours du comportement de a^n . Si $|a| < 1$, alors $a^n \rightarrow 0$, donc $u_n \rightarrow \alpha$. Si $|a| > 1$, la suite ne converge pas en général : elle tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ selon le signe de $u_0 - \alpha$. Si $a \leq -1$, il faut être plus prudent : le signe de a^n alterne souvent, donc la suite *oscille* et n'admet pas de limite, sauf cas particulier.

Le bon réflexe, en exercice, consiste à regarder **à la fois** la valeur de a et le facteur $u_0 - \alpha$. En effet, si $u_0 = \alpha$, alors $u_n = \alpha$ pour tout n : la suite est constante, même lorsque $|a| > 1$ ou $a \leq -1$. En revanche, si $a = -1$, on obtient souvent deux valeurs alternées. Par conséquent, ne concluez jamais trop vite avec une formule apprise par cœur : **le terme initial** peut tout changer.

Comment résoudre une suite géométrique ?

Pour résoudre une suite géométrique, je repère d'abord sa raison q : on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre. Si le premier terme est u_0 , alors $u_n = u_0 \times q^n$. Si on part de u_1 , on écrit $u_n = u_1 \times q^{(n-1)}$. Ensuite, on remplace n pour calculer le terme demandé.

Comment justifier qu'une suite est géométrique ?

Une suite est géométrique si le quotient de deux termes consécutifs est constant. En pratique, je montre que pour tout n , $u_{(n+1)} / u_n = q$, avec q constant, à condition que u_n ne soit pas nul. On peut aussi partir de la relation $u_{(n+1)} = q \times u_n$: c'est la définition la plus directe.

Comment exprimer une suite géométrique en fonction de n ?

Pour exprimer une suite géométrique en fonction de n , j'utilise sa formule explicite. Si la suite commence à l'indice 0, alors $u_n = u_0 \times q^n$. Si elle commence à 1, alors $u_n = u_1 \times q^{(n-1)}$. Il faut donc connaître un terme initial et la raison q pour écrire le terme général.

Comment calculer une suite Arithmético géométrique ?

Une suite arithmético-géométrique vérifie souvent une relation du type $u_{(n+1)} = a \times u_n + b$. Pour la calculer, je cherche d'abord le point fixe l vérifiant $l = a l + b$, donc $l = b / (1 - a)$ si $a \neq 1$. Puis j'étudie $v_n = u_n - l$, qui devient géométrique. On obtient ensuite u_n grâce à v_n .

Comment exprimer une somme en fonction de n ?

Tout dépend du type de suite. Pour une suite arithmétique, la somme des n premiers termes s'exprime avec la moyenne du premier et du dernier terme. Pour une suite géométrique de raison $q \neq 1$, j'utilise la formule $S_n = u_0 \times (1 - q^{(n+1)}) / (1 - q)$, ou une variante selon l'indice de départ.

Comment justifier une suite Arithmético géométrique ?

Je justifie qu'une suite est arithmético-géométrique si elle vérifie une relation de récurrence de la forme $u_{(n+1)} = a \times u_n + b$, avec a et b constants. Elle combine alors une transformation géométrique, via la multiplication par a, et un ajout fixe b. C'est cette double structure qui permet de l'identifier clairement.

Est-ce qu'une suite Peut-être arithmétique et géométrique ?

Oui, mais seulement dans des cas particuliers. Une suite peut être à la fois arithmétique et géométrique si elle est constante. Par exemple, 5, 5, 5, 5... a une raison arithmétique nulle et une raison géométrique égale à 1. La suite nulle convient aussi. En dehors de ces cas, les deux propriétés sont incompatibles.

Comment définir une suite Arithmetico géométrique ?

Une suite arithmético-géométrique est une suite définie par une relation du type $u_{(n+1)} = a \times u_n + b$, où a et b sont des constantes. Elle n'est ni purement arithmétique ni purement géométrique en général. Pour l'étudier, je transforme souvent la suite afin d'obtenir une suite géométrique plus simple à exploiter.

Retiens l'essentiel : dès qu'une suite est définie par $u_{(n+1)} = a \cdot u_n + b$, pense à la suite arithmético-géométrique. Le bon réflexe consiste à chercher la valeur d'équilibre, puis à transformer la suite pour retrouver une géométrique. Si tu t'entraînes à reconnaître la forme exacte, à éviter les confusions classiques et à rédiger chaque étape, tu gagneras en sûreté aussi bien au bac qu'en prépa.

[Continue sur lycee-condorcet.fr](https://lycee-condorcet.fr)

Lycée Condorcet - Document pédagogique